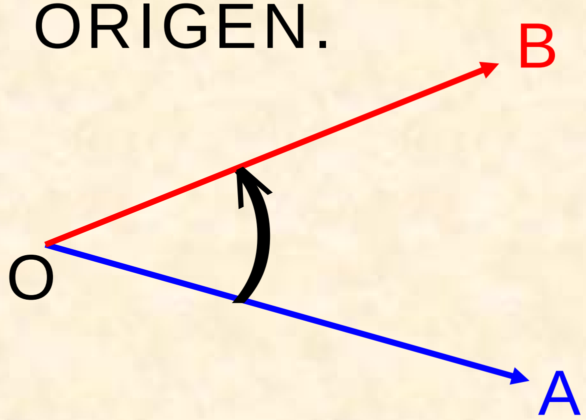
ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

- EL ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO SE OBTIENE GIRANDO UN RAYO ALREDEDOR DE SU ORIGEN.

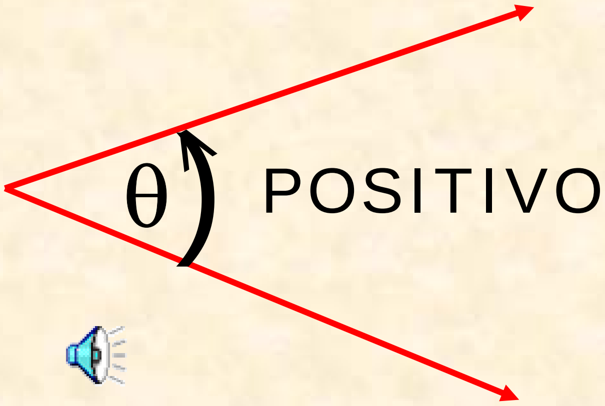


OA : LADO INICIAL

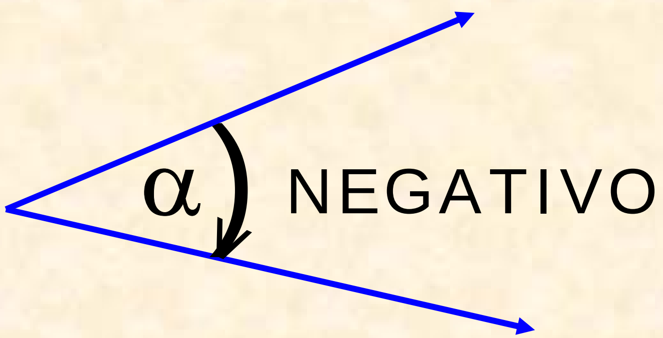
OB : LADO FINAL

O: VÉRTICE

SENTIDO DE GIRO ANTIHORARIO



SENTIDO DE GIRO HORARIO



SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

- SISTEMA SEXAGESIMAL (SISTEMA INGLÉS)

GRADO : 1^{o}	MINUTO : $1'$	SEGUNDO : $1''$

EQUIVALENCIAS

$1^{o} = 60'$	$1' = 60''$	$1^{o} = 3600''$

$1 \text{vuelta} = 360^{o}$

EJEMPLO

Calcular la medida de un ángulo en el sistema sexagesimal , sabiendo que su número de minutos sexagesimales más el doble de su número de grados sexagesimales es igual a 155.

SOLUCIÓN

Sea S **= número de grados sexagesimales**

Entonces el número de minutos sexagesimales = $60S$

Dato : $60S + 2S = 155 \Rightarrow 62S = 155$

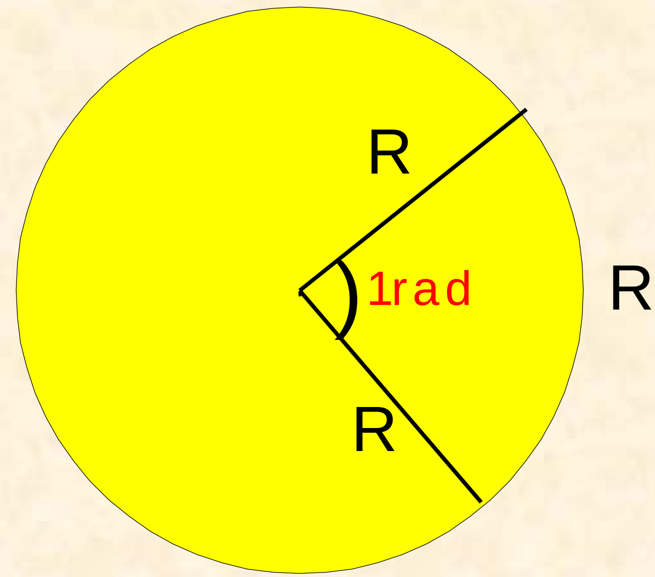
$$S = \frac{155}{62} = \frac{5(31)}{2(31)} \Rightarrow S = \frac{5}{2}$$

El ángulo mide : $\dfrac{5^{o}}{2} = \dfrac{4^{o}60'}{2} = 2^{o}30'$

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

- SISTEMA RADIAL (SISTEMA CIRCULAR)

EN ESTE SISTEMA LA UNIDAD DE MEDIDA ES EL RADIÁN.
UN RADIÁN ES LA MEDIDA DEL ÁNGULO CENTRAL QUE SUBTIENDE EN CUALQUIER CIRCUNFERENCIA UN ARCO DE LONGITUD IGUAL AL RADIO.



$$1\text{vuelta} = 2\pi \text{rad}$$

$$1\text{rad} = 57^{\circ}17'45''$$

RELACIÓN ENTRE LOS DOS SISTEMAS

$$180^{o} = \mathbf{p}\ \text{Rad}$$

ESTA RELACIÓN SE USA PARA CONVERTIR DE UN SISTEMA A OTRO.

EJEMPLOS

EN EL SIGUIENTE CASO CONVERTIR A RADIANES

A) $\theta = 54^{0}$

$$54^{o}\left(\frac{\pi rad}{180^{o}}\right) = \frac{3\pi}{10} rad$$

EN EL SIGUIENTE CASO CONVERTIR AL SISTEMA SEXAGESIMAL

A) $\frac{2\pi}{3} rad$ .... $\frac{2(180^{o})}{3} = 120^{o}$

FACTORES DE CONVERSIÓN

DE GRADOS SEXAGESIMALES A RADIANES	$\dfrac{\pi \, rad}{180^{o}}$
DE RADIANES A GRADOS SEXAGESIMALES	$\pi \, rad = 180^{o}$

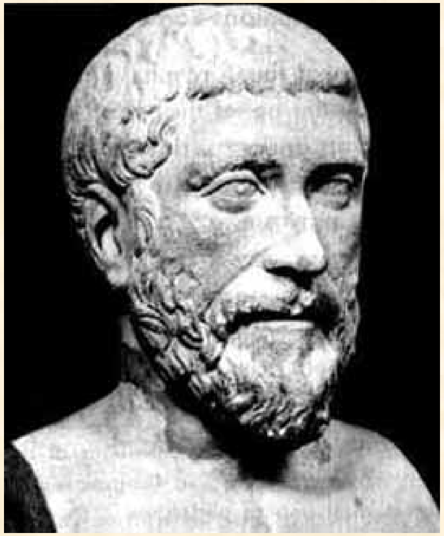
FÓRMULA DE CONVERSIÓN

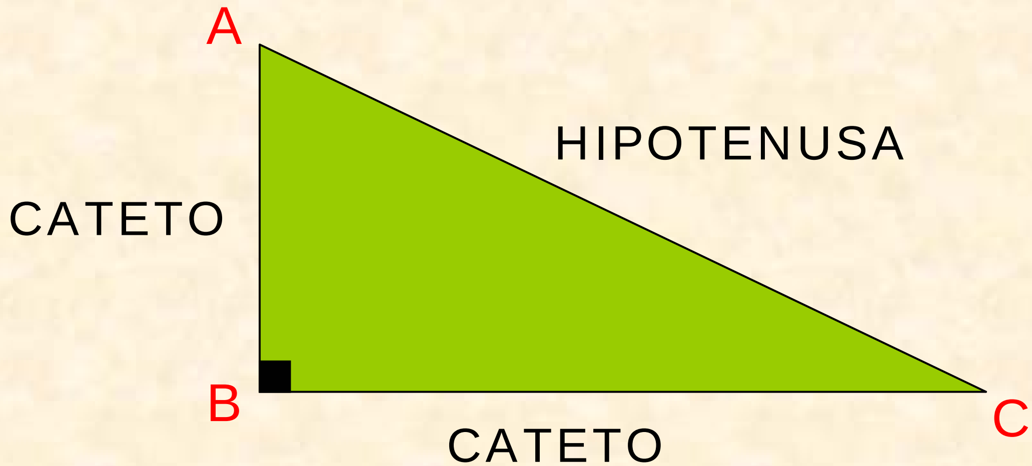
$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}}$$

S : NÚMERO DE GRADOS SEXAGESIMALES

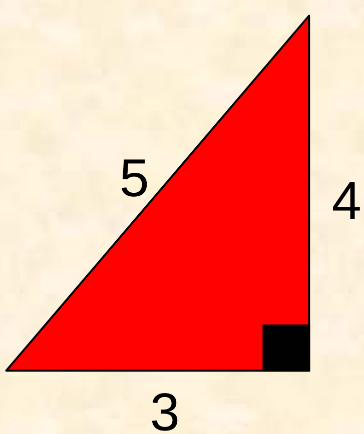
R : NÚMERO DE RADIANES

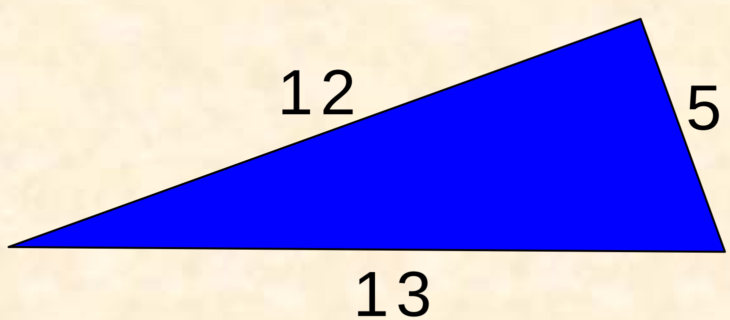
TEOREMA DE PITÁGORAS

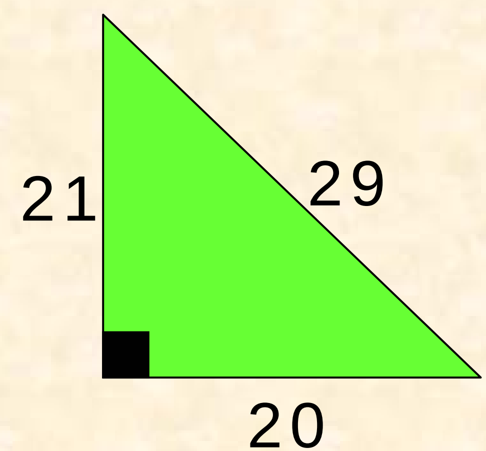




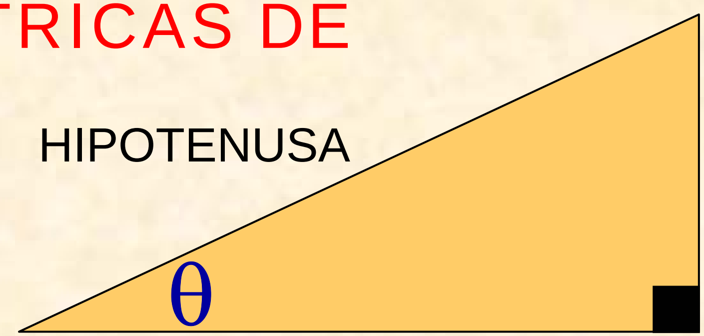
$$(\text{CATETO})^2 + (\text{CATETO})^2 = (\text{HIPOTENUSA})^2$$





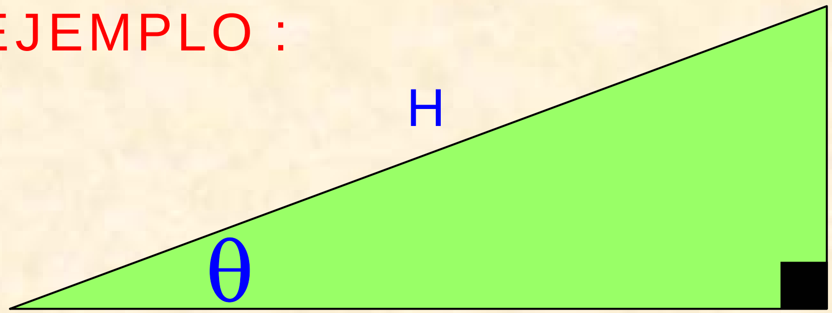


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ANGULOS AGUDOS



SENO $$\text{sen}q = \frac{\text{CatetoOpuestoa}q}{\text{Hipotenusa}}$$	COSENO $$\cos\theta = \frac{\text{CatetoAdyacentea}\theta}{\text{Hipotenusa}}$$
TANGENTE $$\tan\theta = \frac{\text{CatetoOpuestoa}\theta}{\text{CatetoAdyacentea}\theta}$$	COTANGENTE $$\cot\theta = \frac{\text{CatetoAdyacentea}\theta}{\text{CatetoOpuestoa}\theta}$$
SECANTE $$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{CatetoAdyacentea}\theta}$$	COSECANTE $$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{CatetoOpuestoa}\theta}$$

EJEMPLO :



TEOREMA DE PITÁGORAS

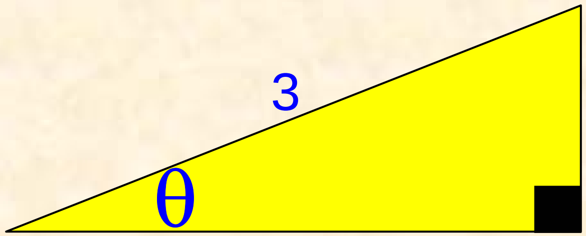
$$H^2 = 12^2 + 35^2$$

$$H = \sqrt{1369} = 37$$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{12}{37}$	$\tan\theta = \dfrac{12}{35}$	$\sec\theta = \dfrac{37}{35}$
$\cos\theta = \dfrac{35}{37}$	$\cot\theta = \dfrac{35}{12}$	$\csc\theta = \dfrac{37}{12}$

EJEMPLO :

Sabiendo que θ es un ángulo agudo tal que $\text{sen}\,\theta = 2/3$.....



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\operatorname{sen}\theta\csc\theta = 1 \qquad \cos\theta\sec\theta = 1 \qquad \tan\theta\cot\theta = 1$$

EJEMPLOS

A) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}36^{o}} = \csc 36^{o}$

B) $\dfrac{1}{\cos 17^{o}} = \sec 17^{o}$

C) $\tan 49^{o}\cot 49^{o} = 1$

D) $\operatorname{sen}2\theta\csc 2\theta = 1$

E) $\cos 63^{o}\sec\theta = 1 \Rightarrow \theta = 63^{o}$

F) $\tan 2\phi\cot\theta = 1 \Rightarrow 2\phi = \theta$

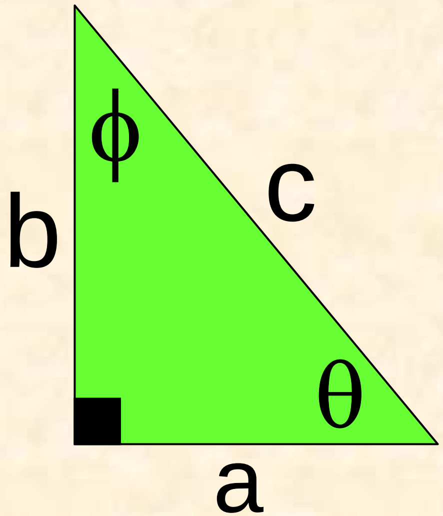
PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

PROPIEDAD :

"LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO SON RESPECTIVAMENTE IGUALES A LAS CO-RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE SU ÁNGULO COMPLEMENTARIO"

A LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS *SENO Y COSENO TANGENTE Y COTANGENTE ;SECANTE Y COSECANTE* SE LES DENOMINA :*CO-RAZONES TRIGONOMÉTRICAS*



$$\operatorname{sen}\theta = \cos\phi$$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\phi$$

$$\tan\theta = \cot\phi$$

$$\cot\theta = \tan\phi$$

$$\sec\theta = \csc\phi$$

$$\csc\theta = \sec\phi$$

EJEMPLOS

A) $\operatorname{sen}25^{o} = \cos 65^{o}$ .... $25^{o} + 65^{o} = 90^{O}$

B) $\tan 43^{o} = \cot 47^{o}$ .... $43^{o} + 47^{o} = 90^{O}$

C) $\sec 60^{o} = \csc 30^{o}$ .... $60^{o} + 30^{o} = 90^{O}$

D) $\operatorname{sen}\theta = \cos 20^{o}$

$$\theta + 20^{o} = 90^{O} \Rightarrow \theta = 70^{o}$$

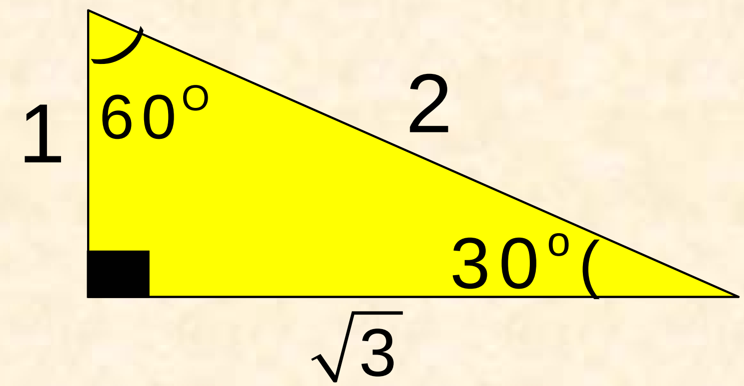
E) $\tan 5\alpha = \cot \alpha$

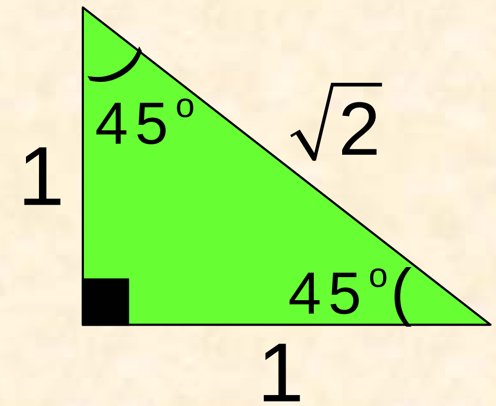
$$5\alpha + \alpha = 90^{o} \Rightarrow \alpha = 15^{o}$$

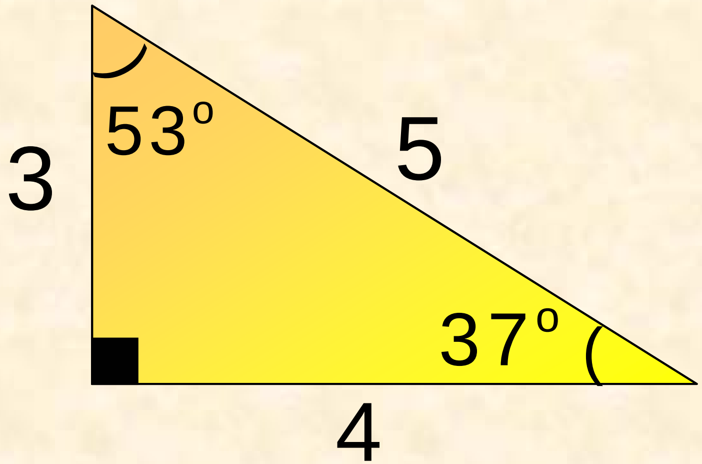
F) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\theta$

$$\theta + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{10}\,\text{rad}$$

TRIÁNGULOS NOTABLES







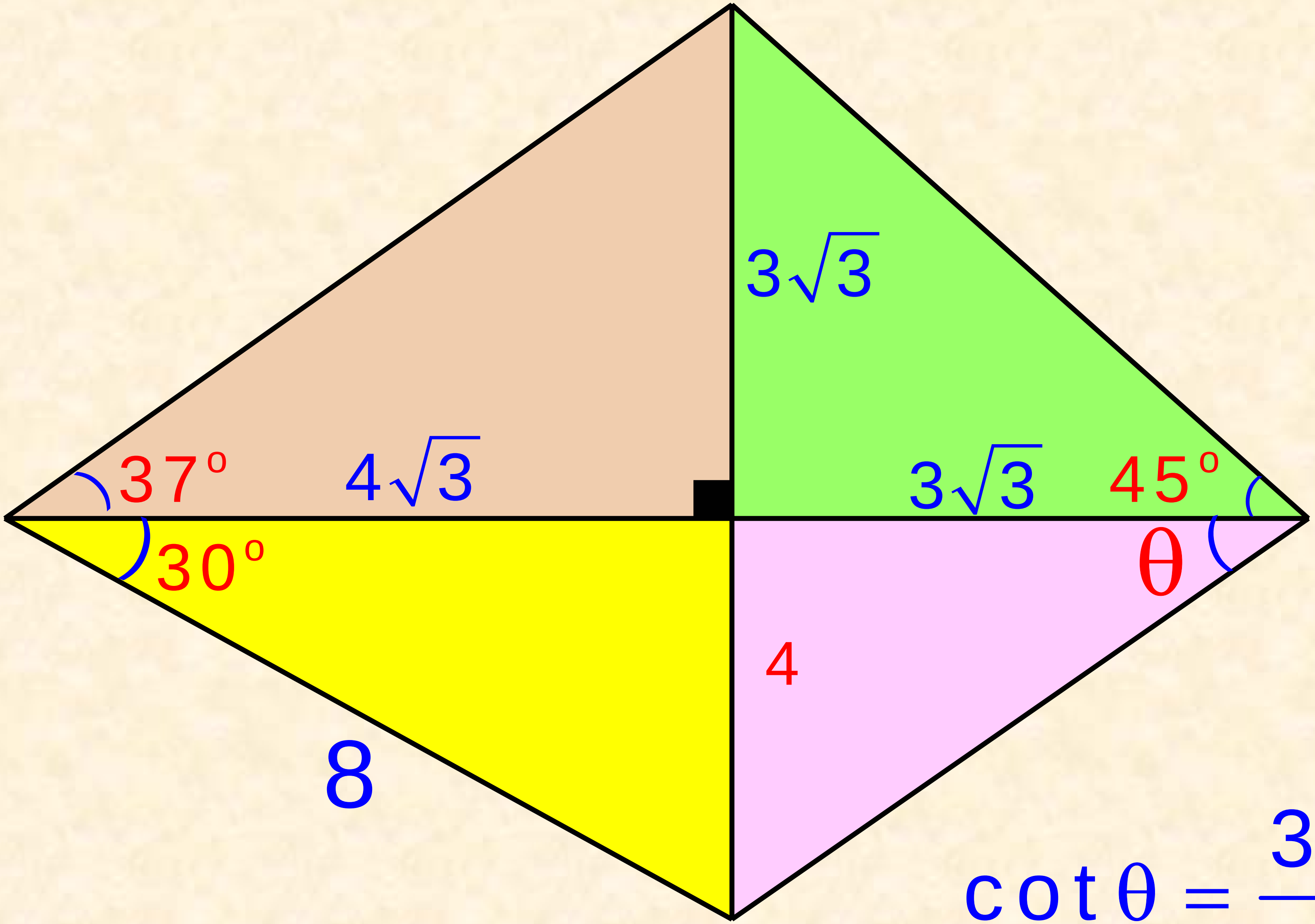
$$\text{sen}\,30^o = \frac{1}{2} \qquad \tan 60^o = \sqrt{3}$$

$$\sec 45^o = \sqrt{2} \qquad \cot 37^o = \frac{4}{3}$$

$$\tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}\,45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

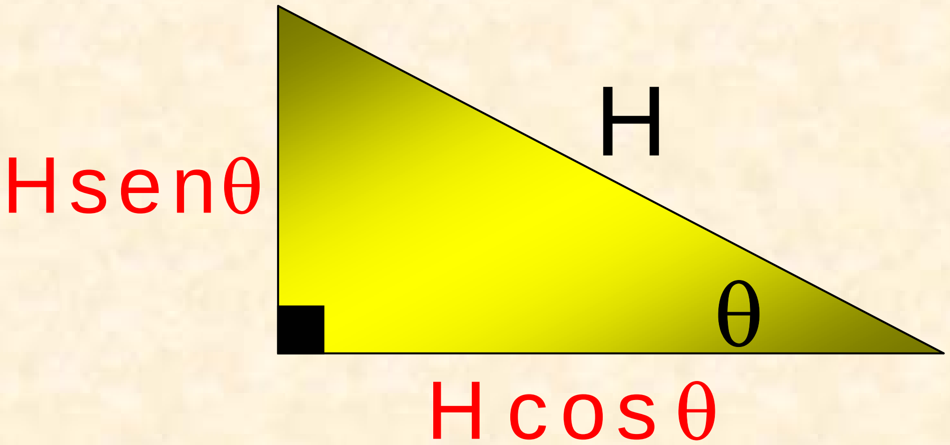
CALCULAR : $\cot\theta$

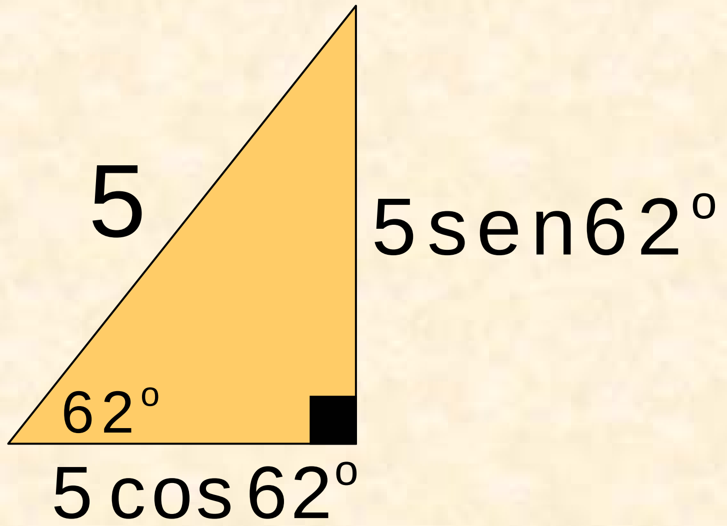


$$\cot\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

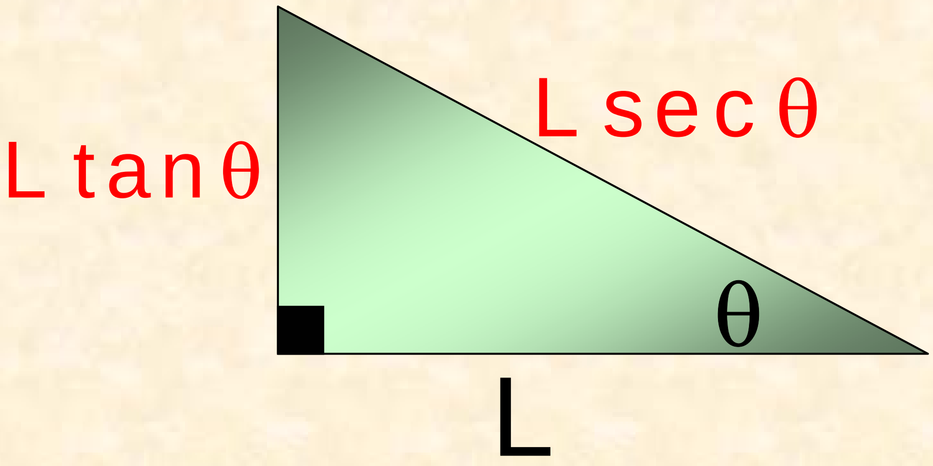
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

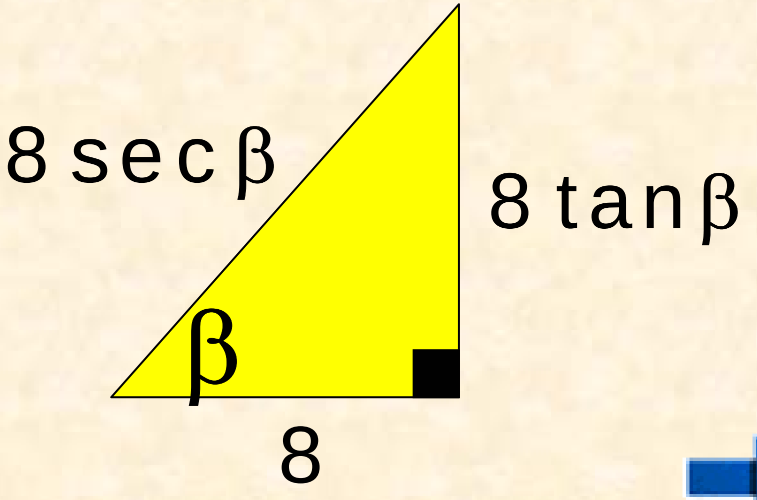
CASO 1 : DATOS , HIPOTENUSA y ÁNGULO AGUDO θ



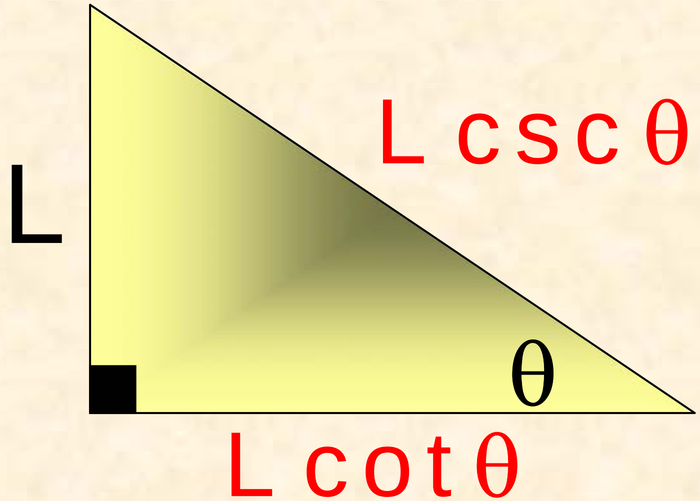


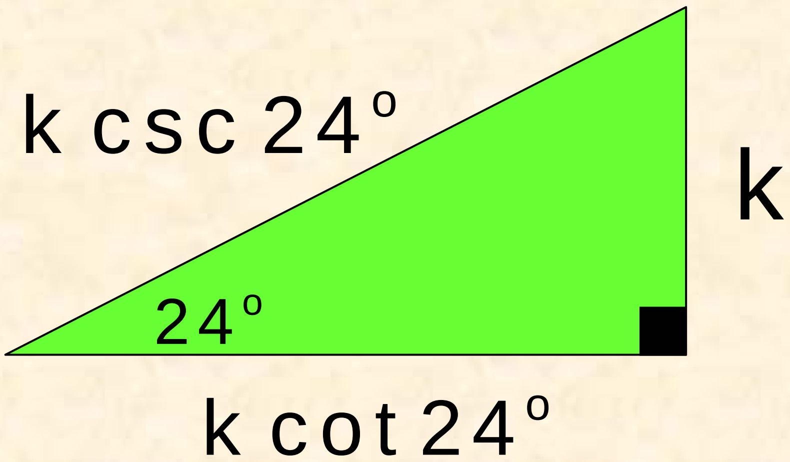
CASO 2 : DATOS ; CATETO ADYACENTE Y ÁNGULO AGUDO θ





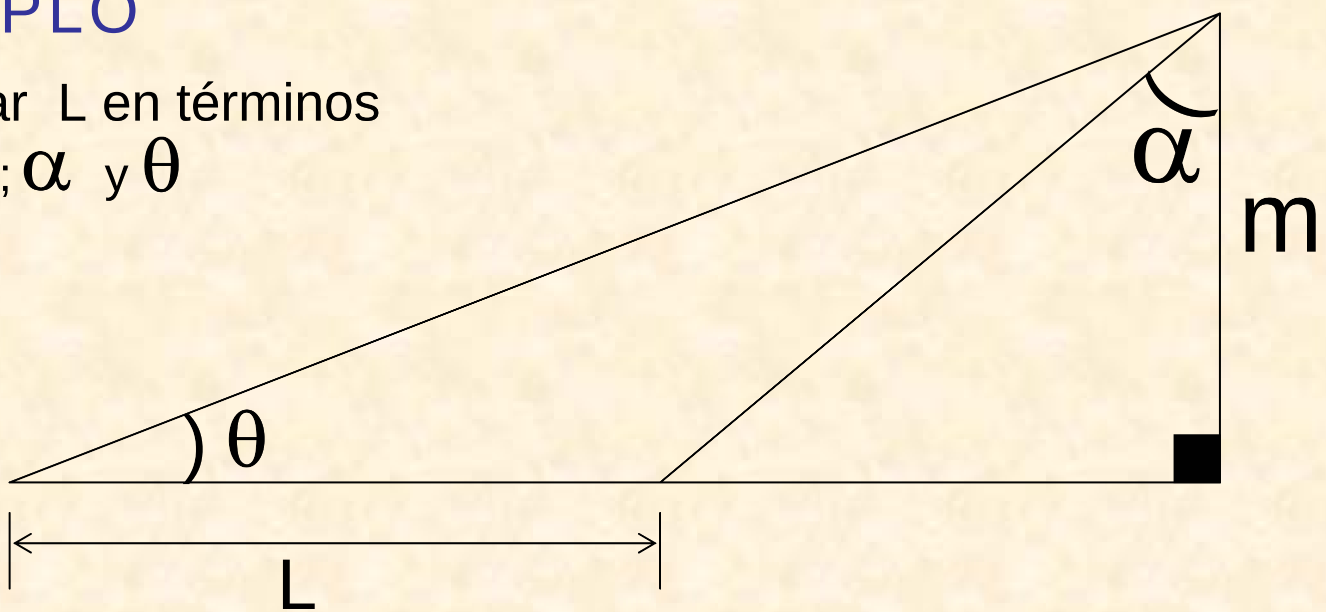
CASO 3 : DATOS; CATETO OPUESTO y ÁNGULO AGUDO θ



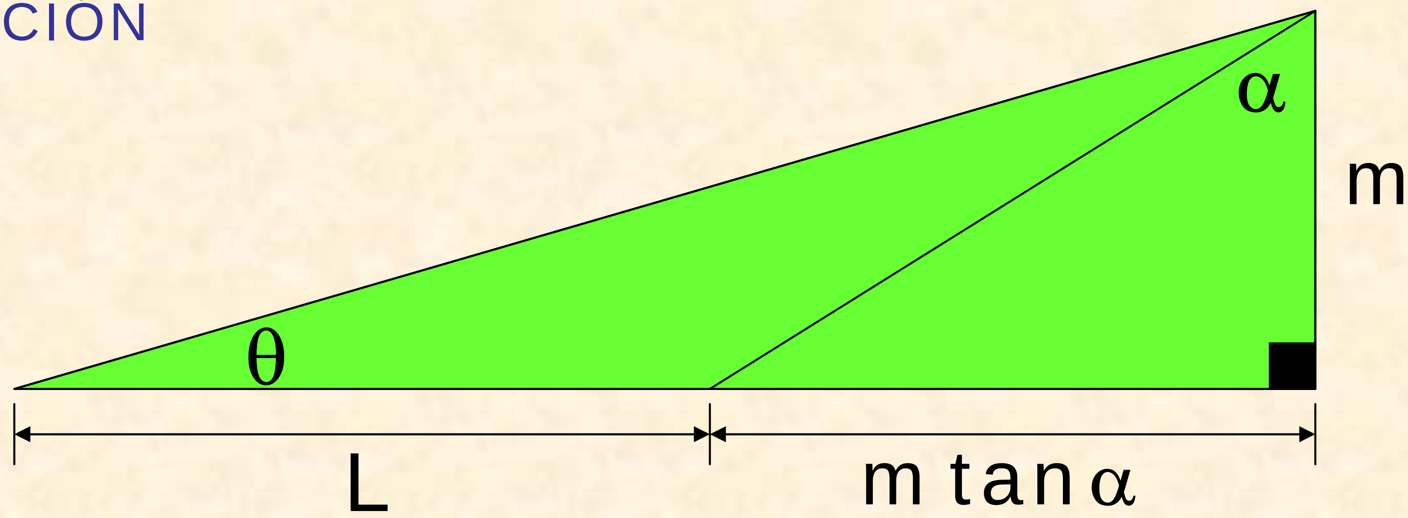


EJEMPLO

Calcular L en términos de m ; α y θ



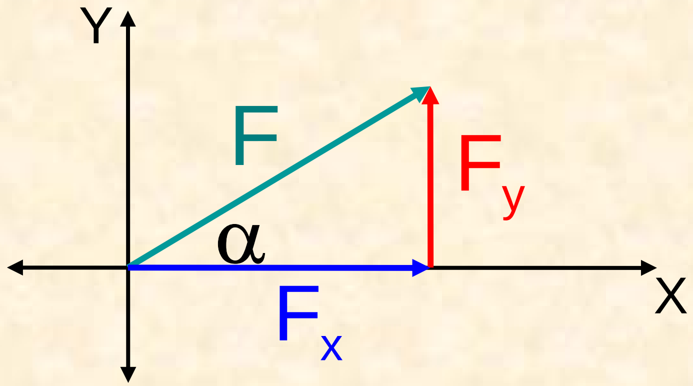
SOLUCIÓN



$$\frac{L + m\tan\alpha}{m} = \cot\theta \Rightarrow L + m\tan\alpha = m\cot\theta$$

$$L = m\cot\theta - m\tan\alpha \Rightarrow L = m(\cot\theta - \tan\alpha)$$

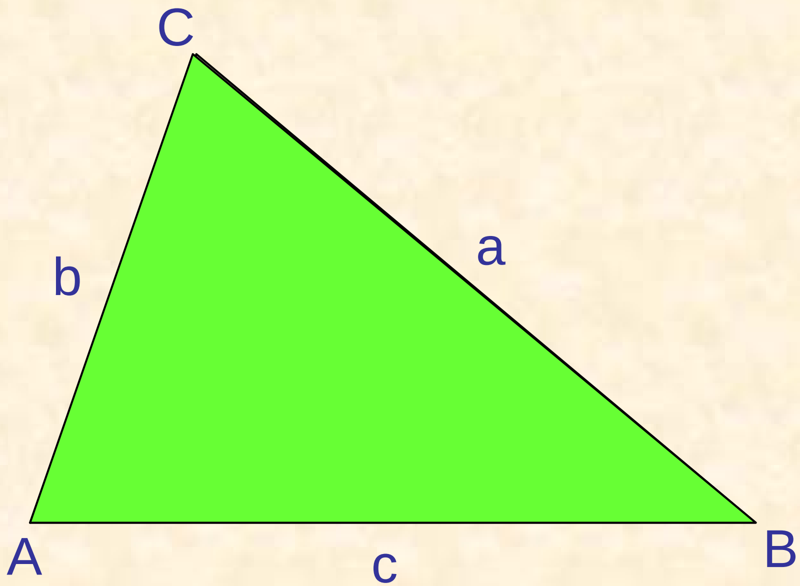
DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR



$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\operatorname{sen}\alpha$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO

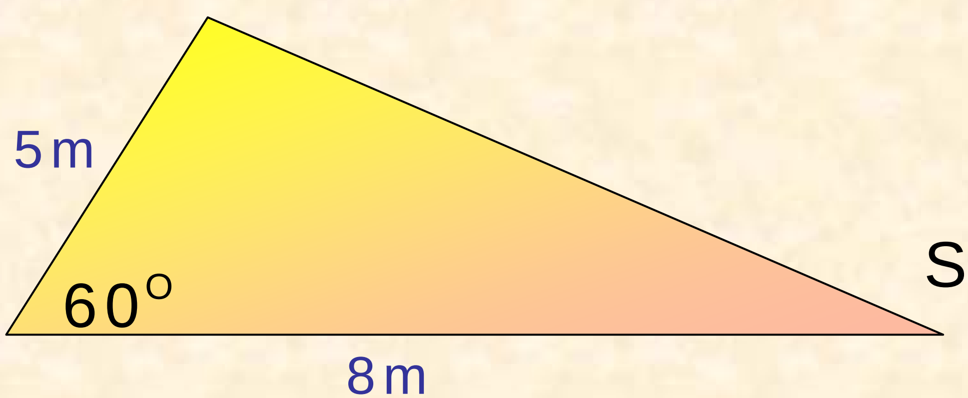


$$S = \frac{ab}{2} \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{bc}{2} \operatorname{sen} A$$

$$S = \frac{ac}{2} \operatorname{sen} B$$

EJEMPLO

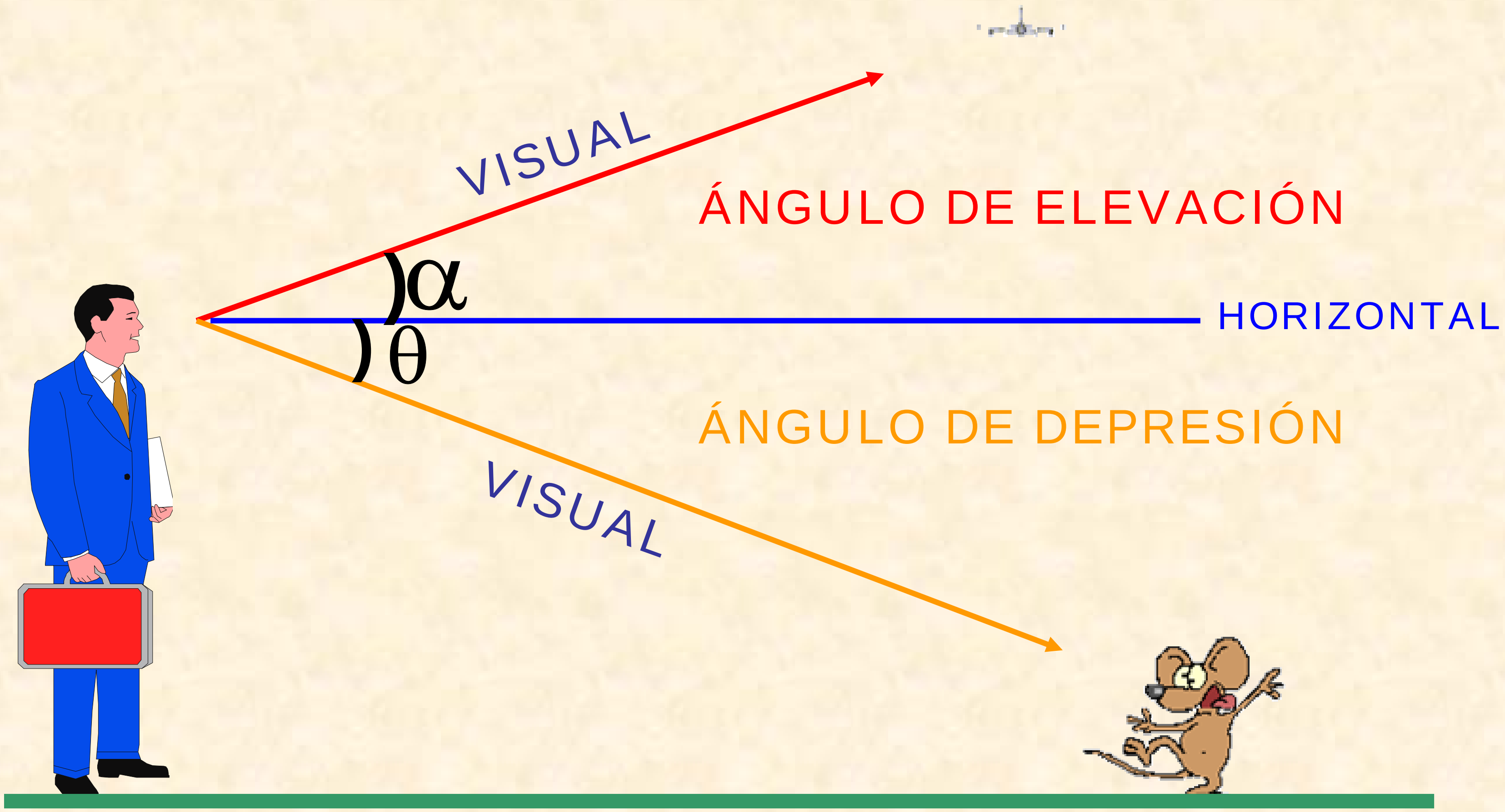


$$S = \frac{(5)(8)}{2} \operatorname{sen} 60^{o}$$

$$S = \frac{(5)(8)}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}\,m^2$$

ÁNGULOS VERTICALES

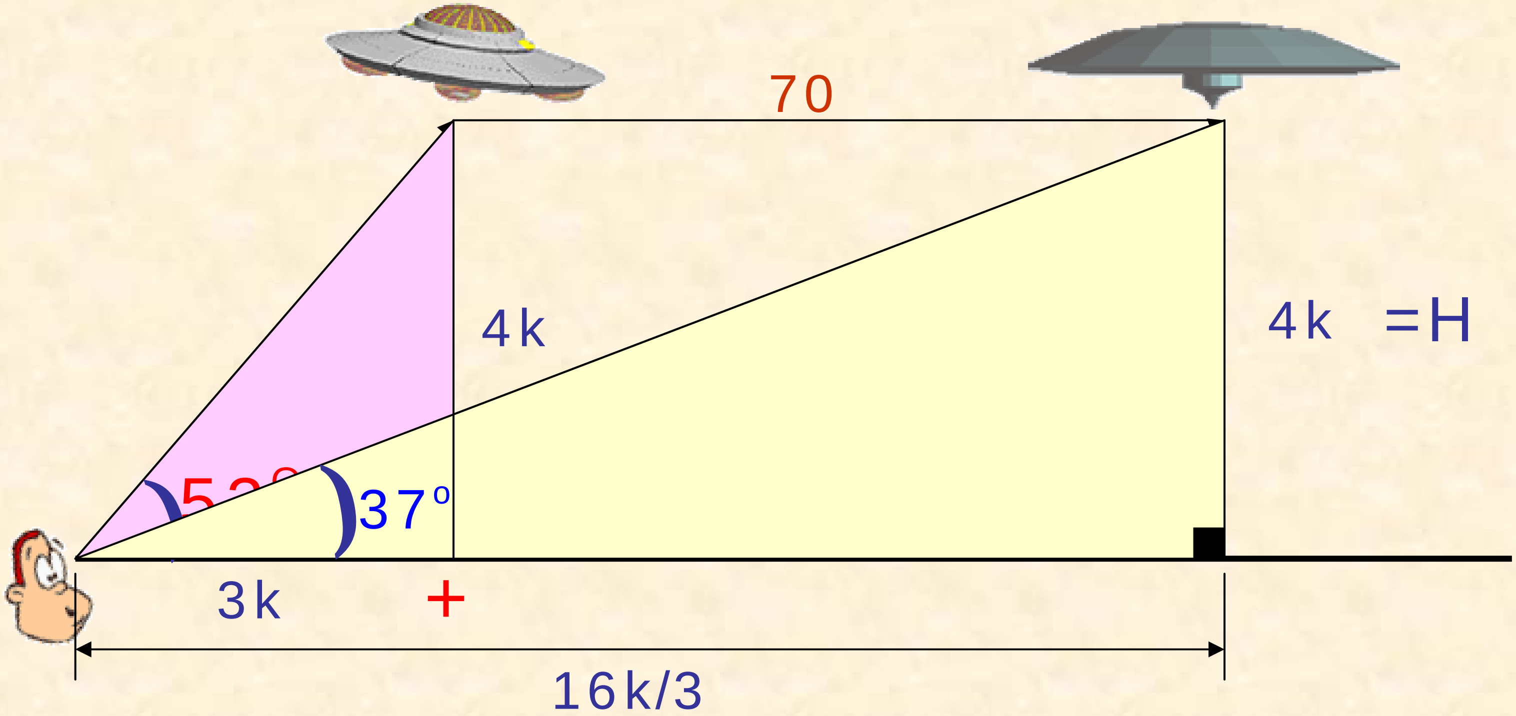
Los ángulos verticales son ángulos agudos contenidos en un plano vertical y formados por dos líneas imaginarias llamadas horizontal y visual



EJEMPLO :

Una persona observa en un mismo plano vertical dos ovnis volando a una misma altura con ángulos de elevación de 53^0 y 37^0 si la distancia entre los ovnis es de 70m ¿A qué altura están los ovnis?

SOLUCIÓN



$9k + 70 = 16k/3$ ➡ $k = 30$ ➡ $H = 120$

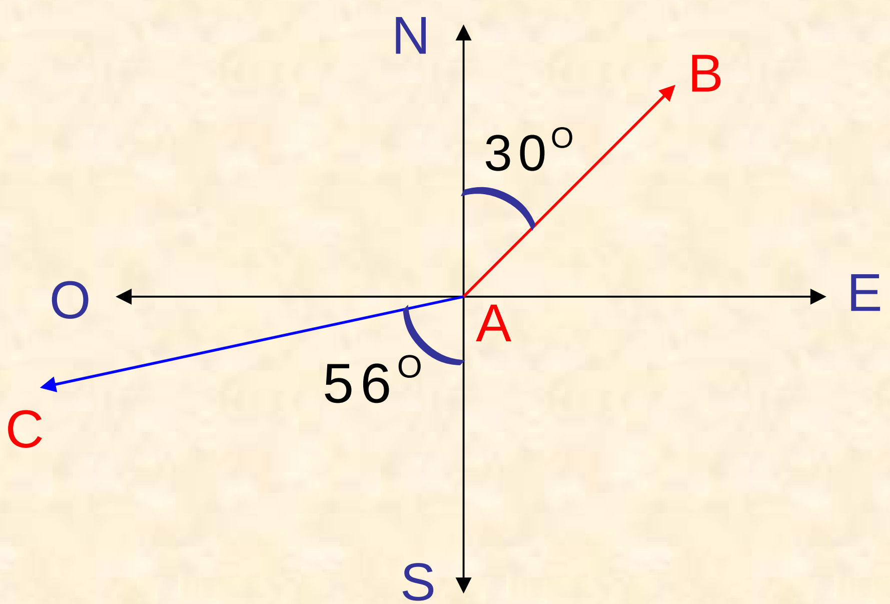
ÁNGULOS HORIZONTALES

Los ángulos horizontales son ángulos agudos contenidos en un plano horizontal, se determinan tomando como referencia los puntos cardinales norte(N) , sur(S) , este(E) y oeste(O).

DIRECCIÓN

La dirección de B respecto de A es N30°E o E60°N

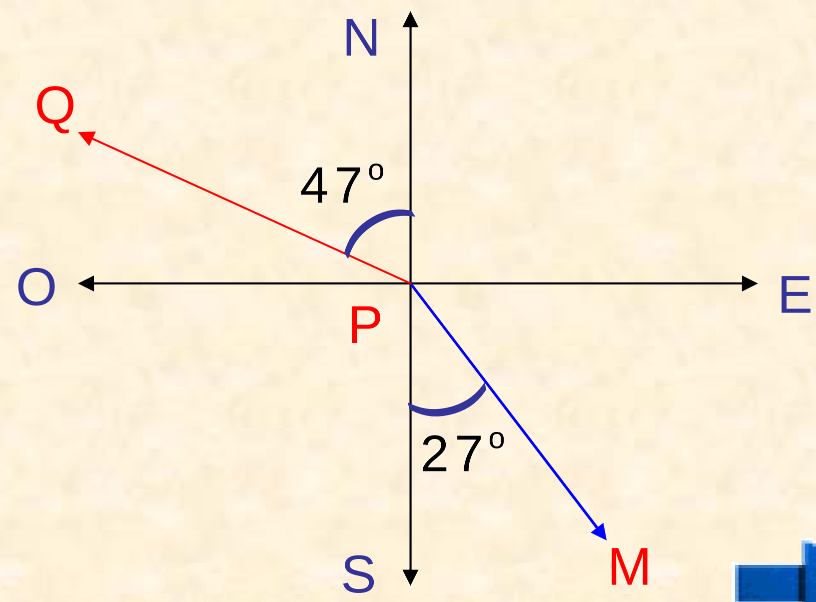
La dirección de C respecto de A es S56°O o O34°S



RUMBO

El rumbo de Q respecto de P 47° al oeste del norte

El rumbo de M respecto de P 27° al este del sur



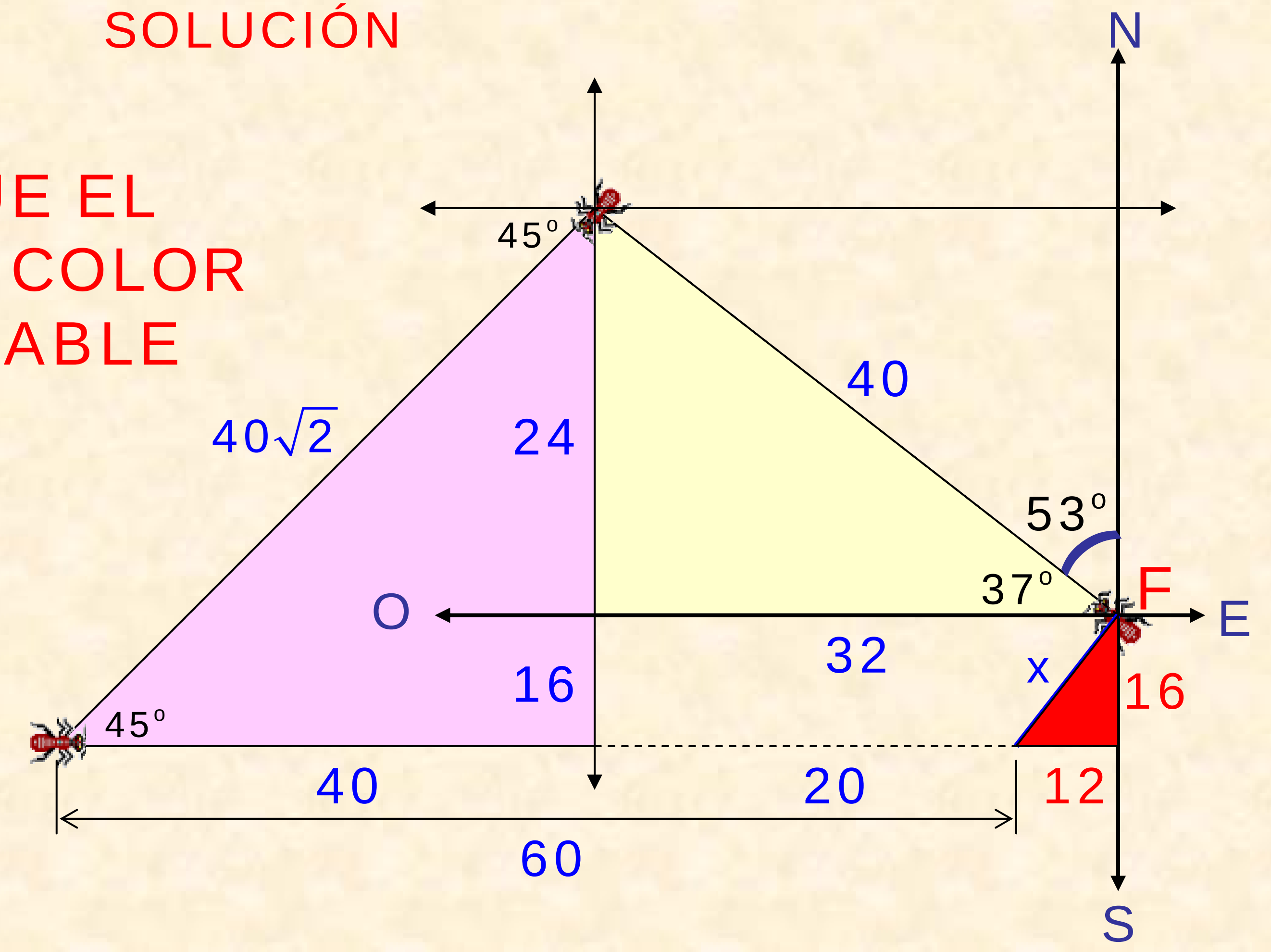
EJEMPLO :

Un insecto parte de un punto F y recorre 40 km en la dirección N53^0O luego recorre 40⌧2 km en la dirección SO, finalmente recorre 60 km hacia el este. ¿A qué distancia se encuentra el insecto de F ?

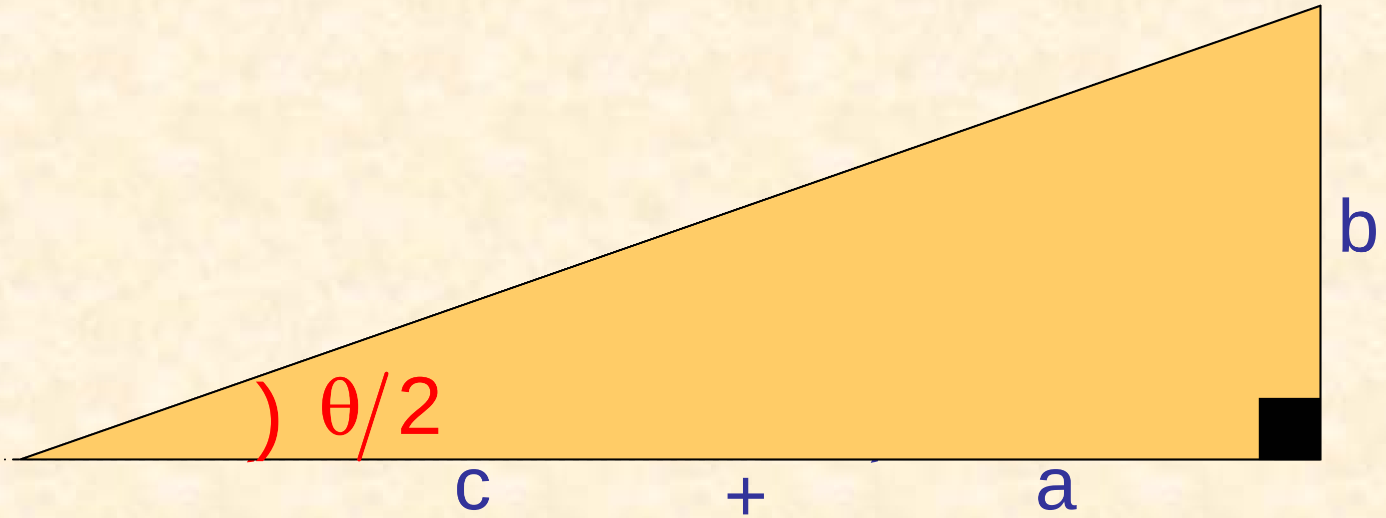
SOLUCIÓN

OBSERVA QUE EL TRIÁNGULO DE COLOR ROJO ES NOTABLE

X = 20



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA MITAD DE UN ÁNGULO AGUDO (método gráfico)

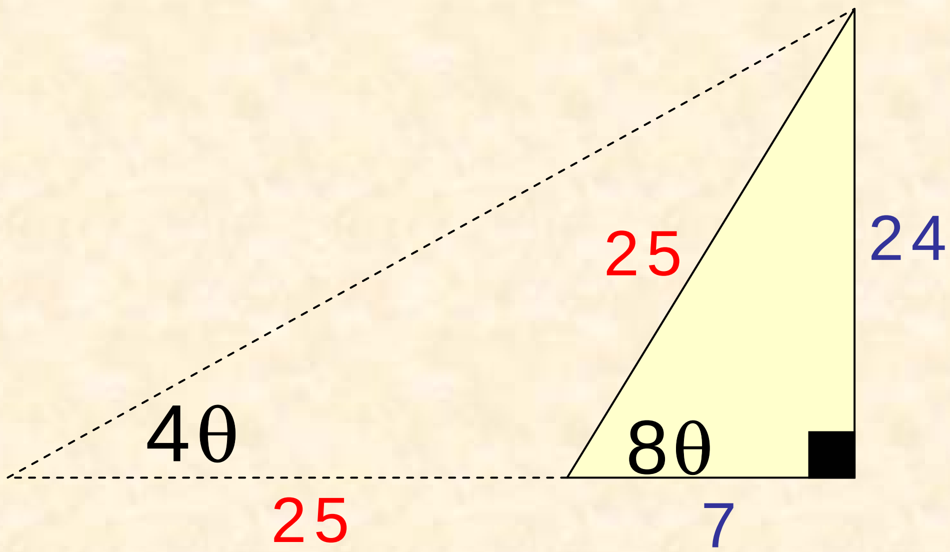


$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{c+a} = \frac{c-a}{b}$$

EJEMPLO :

Sabiendo que : $\tan 8\theta = 24/7$, calcula $\tan 2\theta$

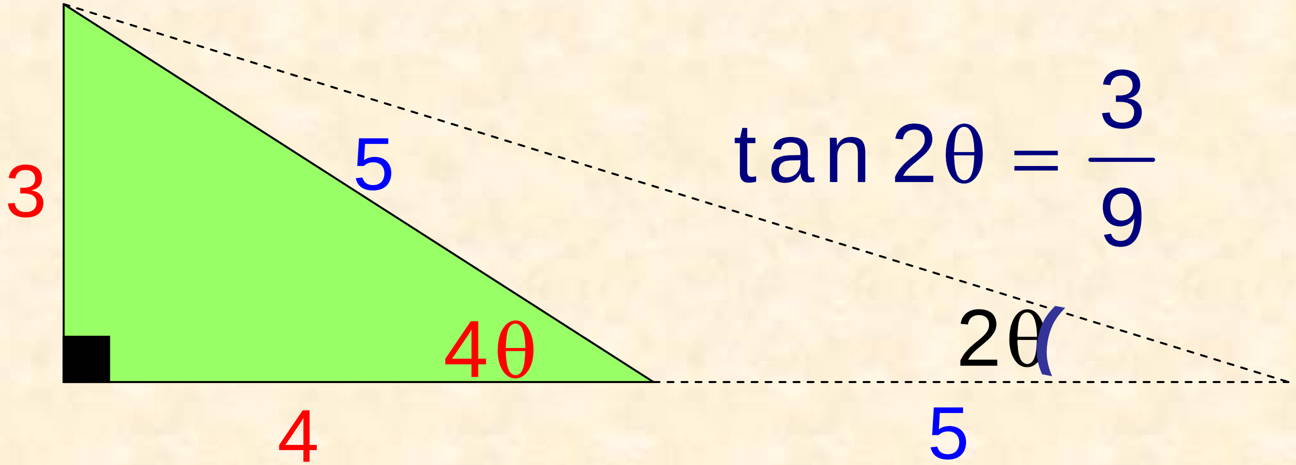
SOLUCIÓN



$$\tan 4\theta = \frac{24}{25+7}$$

$$\tan 4\theta = \frac{24}{32}$$

$$\tan 4\theta = \frac{3}{4}$$



$$\tan 2\theta = \frac{3}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{1}{3}$$